LAMDA
Learning And Mining from DatA
http://lamda.nju.edu.cn

动态环境下的在线学习

张利军
南京大学
计算机科学与技术系

目录

- 研究背景
  - 机器学习
  - 大数据
- 在线学习
  - 遗憾
  - 在线凸优化
- 动态环境
  - 动态遗憾
  - 自适应算法
- 总结

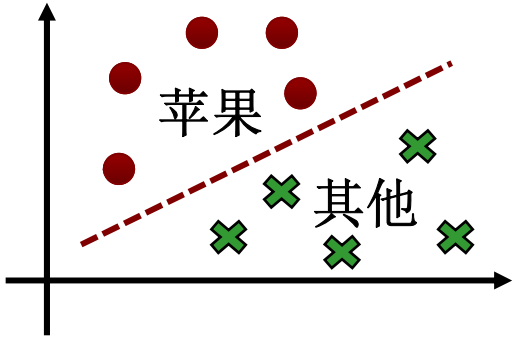
机器学习

LAMDA
Learning And Mining from DatA
http://lamda.nju.edu.cn

➢ 监督学习

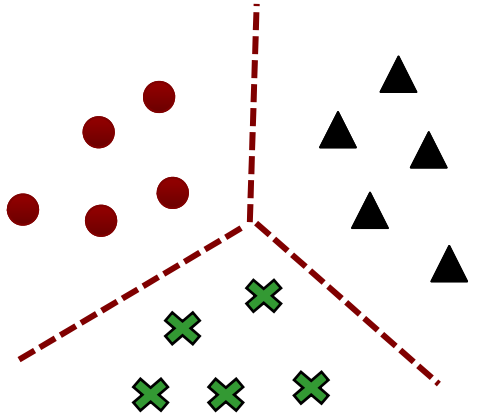
苹果

$$(\mathbf{x}_1, y_1)$$
$$\dots$$
$$(\mathbf{x}_n, y_n) \Rightarrow y \approx h(\mathbf{x})$$



➢ 无监督学习

$$\mathbf{x}_1$$
$$\dots$$
$$\mathbf{x}_n \Rightarrow h(\mathbf{x})$$



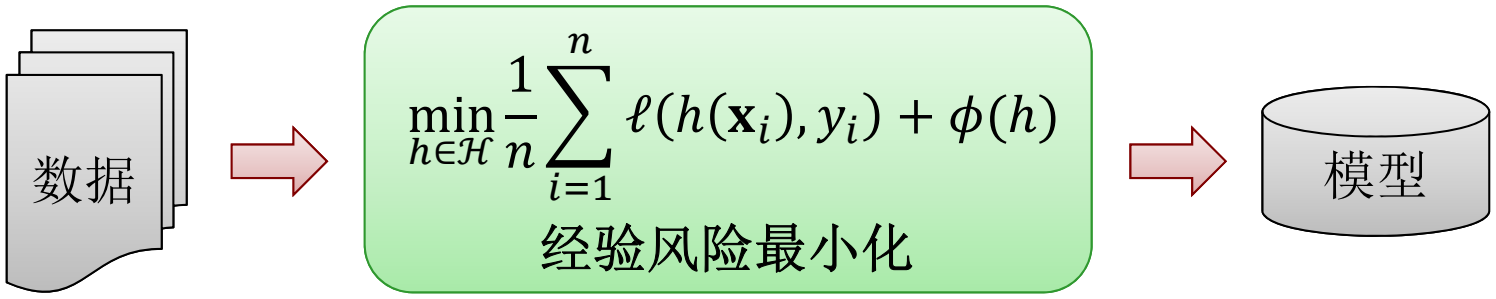
监督学习

- 经验风险最小化

$$\min_{h\in\mathcal{H}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(h(\mathbf{x}_i), y_i) + \phi(h)$$

  - $(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_n, y_n) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$是训练数据
  - n是样本数量、d是数据维度、$\mathcal{H}$为假设空间
  - $\ell(\cdot,\cdot)$为损失函数、$\phi(\cdot)$为正则化因子

- 批量学习



典型学习算法

- 支持向量机

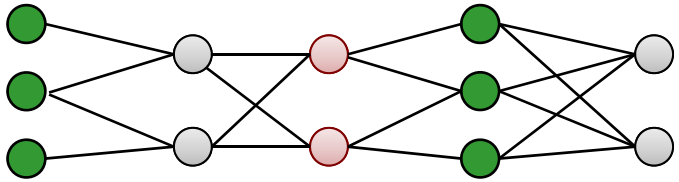
$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max(0,1-y_i\mathbf{w}^\top\mathbf{x}_i) + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{w}\|^2$$

  - 铰链损失：$\ell(u,v) = \max(0,1-uv)$
  - 线性函数空间：$\mathcal{H} = \{h(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top\mathbf{x}\}$
  - 正则化：$\lambda\|\mathbf{w}\|^2/2$

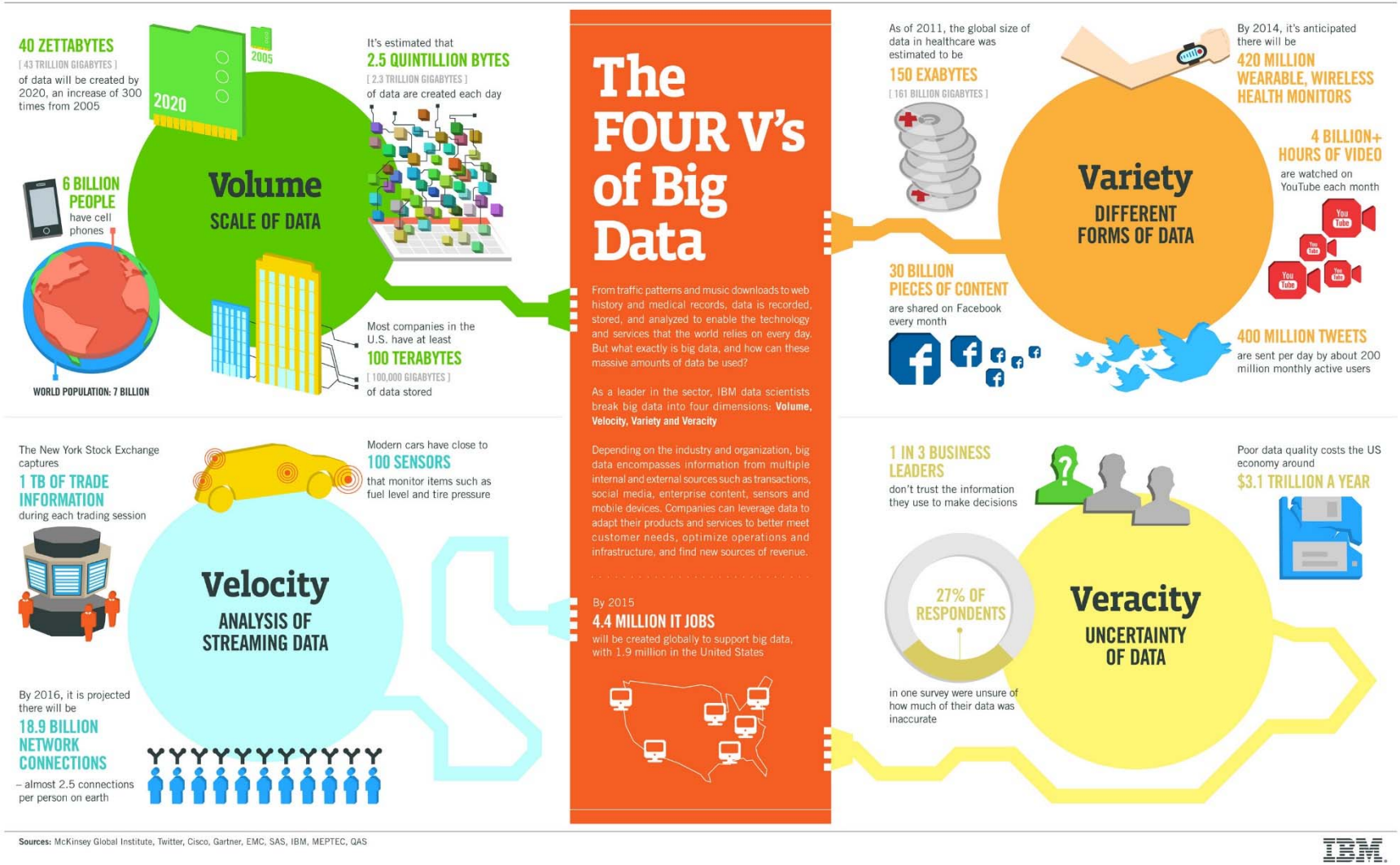
- 深度学习

  - 函数空间$\mathcal{H}$
    - ✓神经网络

$$\min_{h\in\mathcal{H}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(h(\mathbf{x}_i), y_i)$$



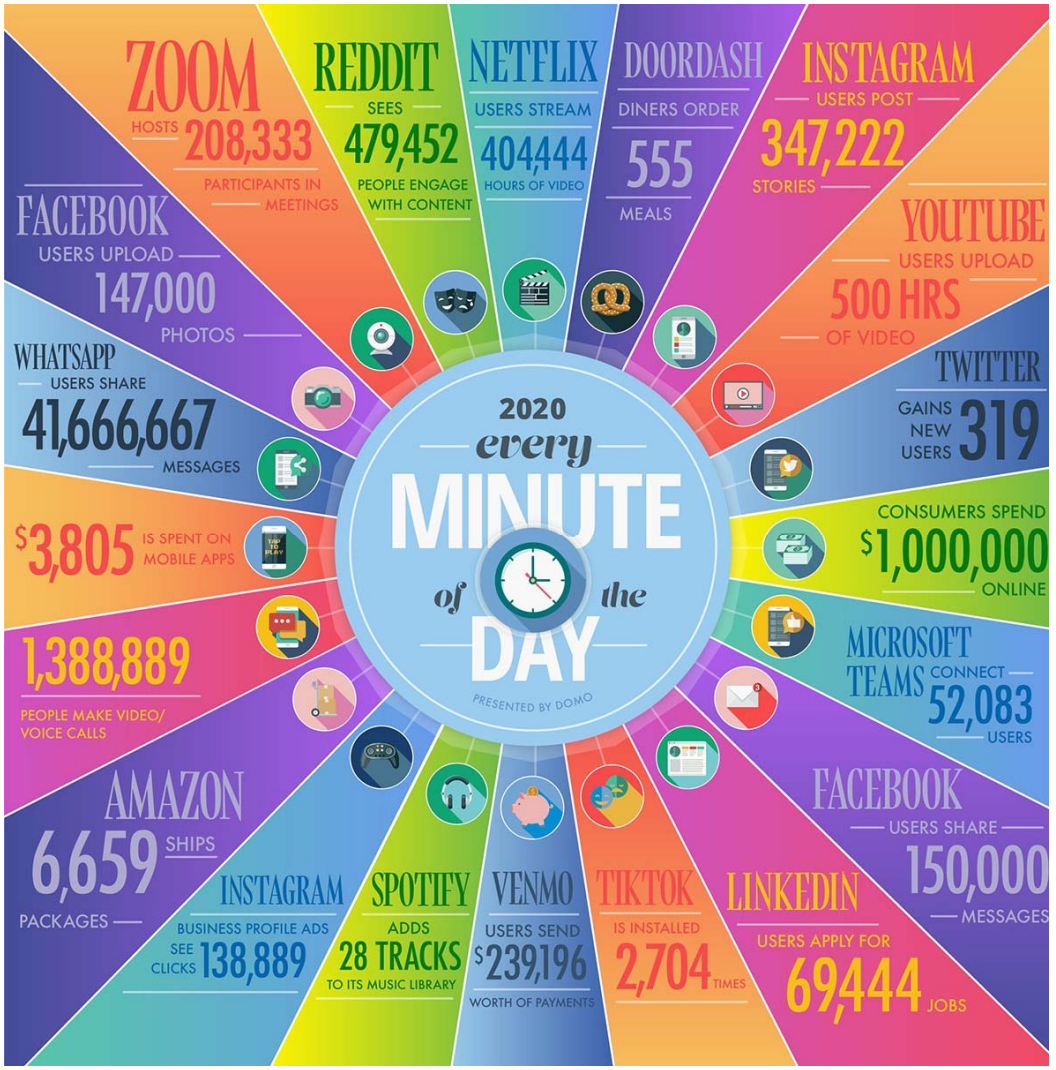
大数据



http://www.ibmbigdatahub.com/infographic/four-vs-big-data

快速增长

- Facebook
  - 14.7万图片
- Amazon
  - 6659个包裹
- Zoom
  - 20.8万用户开会
- YouTube
  - 500小时的视频



https://www.visualcapitalist.com/every-minute-internet-2020

大数据带来的挑战

- 经验误差最小化

$$\min_{h\in\mathcal{H}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(h(\mathbf{x}_i), y_i) + \phi(h)$$

  - n是训练样本的数量
  - 训练复杂度：$O(n)$、$O(n^2)$

- 大数据“规模大”
  - 训练过程计算量大
- 大数据“增长快”
  - 频繁需要重新训练

在线学习

目录

- 研究背景
  - 机器学习
  - 大数据
- 在线学习
  - 遗憾
  - 在线凸优化
- 动态环境
  - 动态遗憾
  - 自适应算法
- 总结

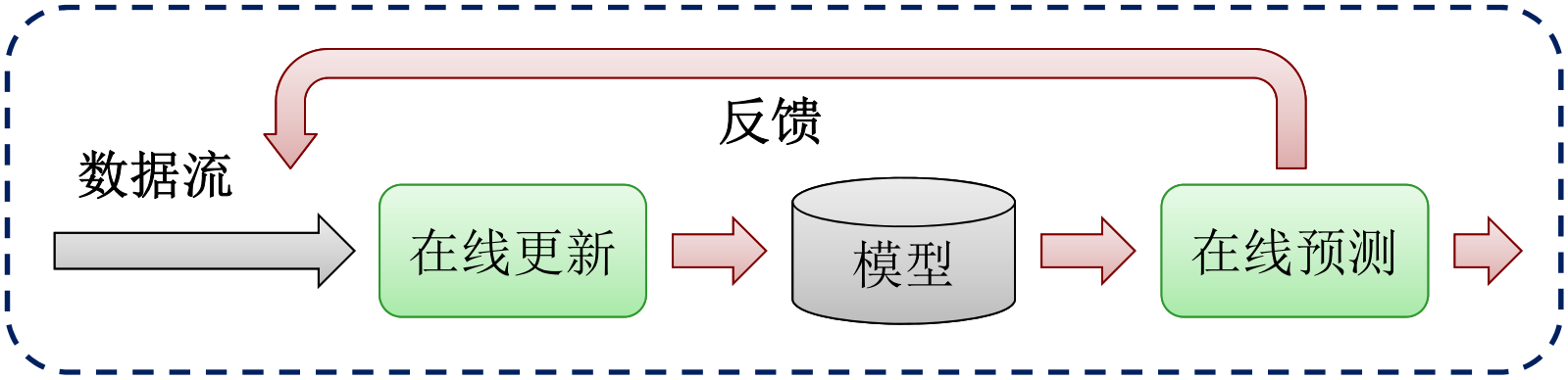
在线学习

- 定义 [Shalev-Shwartz, 2011]

  Online learning is the process of answering a sequence of questions given (maybe partial) knowledge of answers to previous questions and possibly additional information.

  - 完全信息在线学习
  - 赌博机在线学习

- 学习流程



数学定义

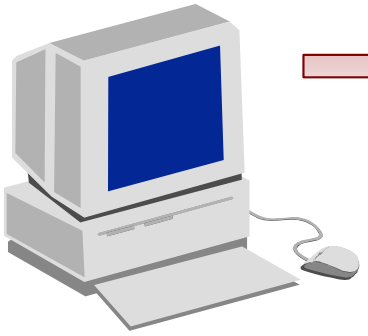
➢ 在线学习 [Cesa-Bianchi and Lugosi, 2006]

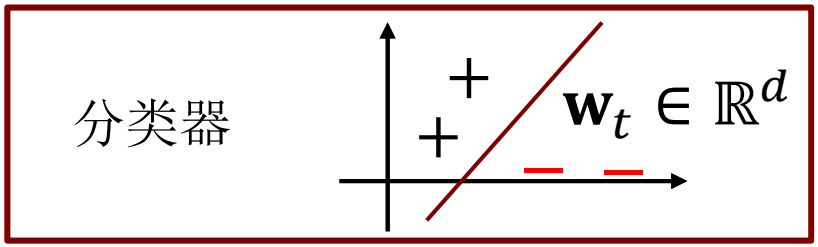
for $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**

1. 学习器选择决策$\mathbf{w}_t \in \mathcal{W}$

   同时，对手选择函数$f_t(\cdot)$

end for





样本$(\mathbf{x}_t, y_t) \in \mathbb{R}^d \times \{\pm 1\}$

损失$f_t(\mathbf{w}) = \max(1 - y_t \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_t, 0)$

数学定义

➢ 在线学习 [Cesa-Bianchi and Lugosi, 2006]

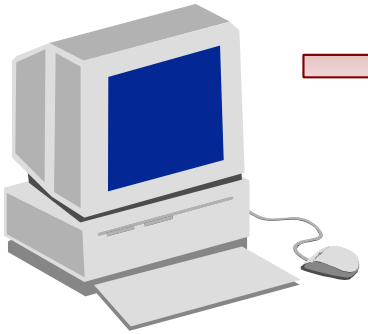
for $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**

1. 学习器选择决策$\mathbf{w}_t \in \mathcal{W}$

   同时，对手选择函数$f_t(\cdot)$

2. 学习器遭受损失$f_t(\mathbf{w}_t)$，并更新$\mathbf{w}_t$

end for



遭受损失 $f_t(\mathbf{w}_t)$，更新 $\mathbf{w}_t$

数学定义

- 在线学习 [Cesa-Bianchi and Lugosi, 2006]

  for $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**

  1. 学习器选择决策$\mathbf{w}_t \in \mathcal{W}$

     同时，对手选择函数$f_t(\cdot)$

  2. 学习器遭受损失$f_t(\mathbf{w}_t)$，并更新$\mathbf{w}_t$

  end for

- 累积损失

$$\sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t)$$

  - 最小化累积损失

数学定义

- 在线学习 [Cesa-Bianchi and Lugosi, 2006]

  for $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**

  1. 学习器选择决策$\mathbf{w}_t \in \mathcal{W}$

     同时，对手选择函数$f_t(\cdot)$

  2. 学习器遭受损失$f_t(\mathbf{w}_t)$，并更新$\mathbf{w}_t$

  end for

- 遗憾（Regret）

$$\text{Regret} = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \min_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}} \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w})$$

批量学习

  - 最小化遗憾

数学定义

- 在线学习 [Cesa-Bianchi and Lugosi, 2006]

  for $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**

  1. 学习器选择决策$\mathbf{w}_t \in \mathcal{W}$

     同时，对手选择函数$f_t(\cdot)$

  2. 学习器遭受损失$f_t(\mathbf{w}_t)$，并更新$\mathbf{w}_t$

  end for

- 遗憾（Regret）

$$\text{Regret} = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \min_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}} \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}) = o(T)$$

  - 最小化遗憾

发展历史

- 感知机（Perceptron） [Rosenblatt, 1958]
  - 在线分类
- 基于专家建议的在线学习 [Littlestone and Warmuth, 1989]
  - 存在K个离散专家
  - 集成专家的预测
- 在线凸优化 [Zinkevich, 2003]
  - 损失函数为凸、决策集为凸
  - 在线分类，例如在线SVM
  - 在线回归，例如在线最小二乘

在线凸优化

- 在线学习

  for $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**

  1. 学习器选择决策$\mathbf{w}_t \in \mathcal{W}$

     同时，对手选择函数$f_t(\cdot)$

  2. 学习器遭受损失$f_t(\mathbf{w}_t)$，并更新$\mathbf{w}_t$

  end for

  - $f_t(\cdot)$是凸函数、$\mathcal{W}$为凸集合

- 在线梯度下降 [Zinkevich, 2003]

  - $\eta_t \geq 0$是步长
  - $\nabla f_t(\mathbf{w}_t)$为梯度

$$\mathbf{w}'_{t+1} = \mathbf{w}_t - \eta_t \nabla f_t(\mathbf{w}_t)$$

$$\mathbf{w}_{t+1} = \Pi_{\mathcal{W}}[\mathbf{w}'_{t+1}]$$

理论保障

- 凸函数 [Zinkevich, 2003]
  - 在线梯度下降，$\eta_t = O(1/\sqrt{t})$

$$\text{Regret} = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \min_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}} \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}) = O(\sqrt{T})$$

- 强凸函数 [Hazan et al, 2007]
  - 在线梯度下降，$\eta_t = O(1/[\lambda t])$

$$\text{Regret} = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \min_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}} \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}) = O(\log T)$$

- 指数凹函数 [Hazan et al, 2007]
  - 在线牛顿法　　$\text{Regret} = O(d \log T)$

目录

- 研究背景
  - 机器学习
  - 大数据
- 在线学习
  - 遗憾
  - 在线凸优化
- 动态环境
  - 动态遗憾
  - 自适应算法
- 总结

动态环境

- 遗憾

$$\text{Regret} = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \min_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}} \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w})$$

动态环境

➢ 遗憾→静态遗憾

$$\text{Regret} = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \min_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}} \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}) = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}^*)$$

- $\mathbf{w}^* = \text{argmin}_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}} \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w})$为批量学习最优解
- 局限：假设最优模型固定不变

➢ 动态环境下的在线学习

- 最优模型漂移

1. 推荐系统：用户兴趣
2. 金融理财：投资策略

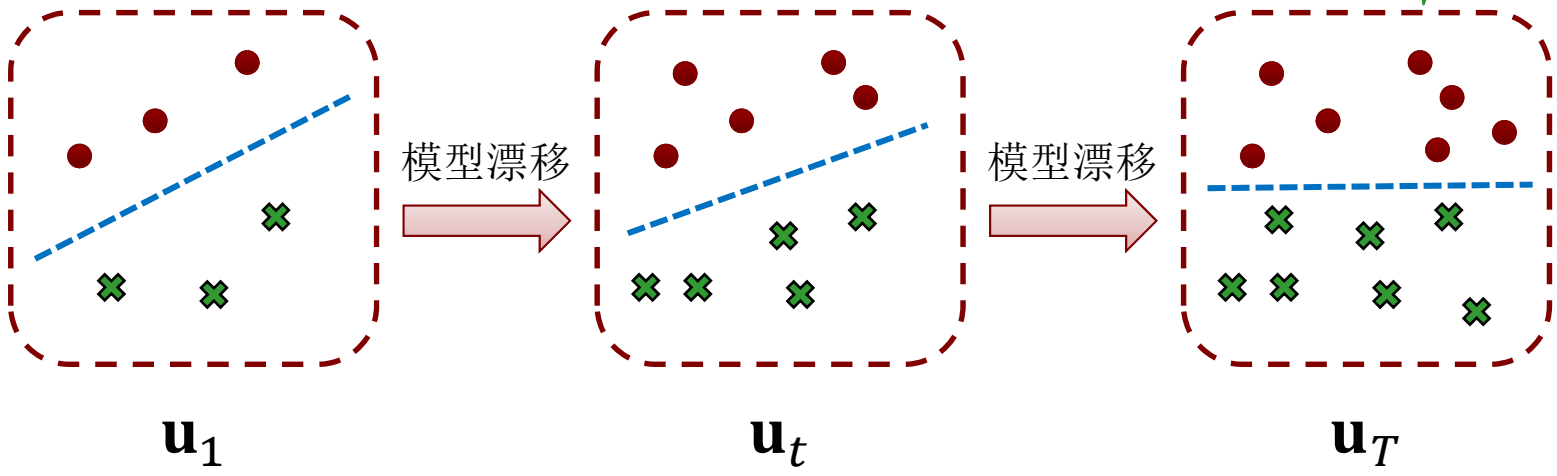
动态遗憾

➢ 动态遗憾（Dynamic Regret） [Zinkevich, 2003]

$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{u}_t)$$

比较序列未知！

$\square$ $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T$为动态变化的模型序列



动态遗憾

➢ 动态遗憾（Dynamic Regret） [Zinkevich, 2003]

$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{u}_t)$$

◘ $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T$为动态变化的模型序列

➢ 最差动态遗憾 [Besbes et al., 2015; Mokhtari et al., 2016; Yang et al., 2016; Zhang et al., 2017]

$$\mathrm{R}(\mathbf{w}_1^*, \ldots, \mathbf{w}_T^*) = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t^*) = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \sum_{t=1}^{T} \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} f_t(\mathbf{w})$$

◘ $\mathbf{w}_t^* = \mathrm{argmin}_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} f_t(\mathbf{w})$为瞬时最优解

最差动态遗憾（1）

➢ 函数变化 [Besbes et al., 2015]

$$V_T = \sum_{t=1}^{T} \sup_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}} |f_{t+1}(\mathbf{w}) - f_t(\mathbf{w})| \leq B_T$$

- 重启动的在线梯度下降

$$\mathrm{R}(\mathbf{w}_1^*, \ldots, \mathbf{w}_T^*) = \begin{cases} O\left(B_T^{1/3} T^{2/3}\right) & \text{凸函数} \\ O\left(\log T \sqrt{B_T T}\right) & \text{强凸函数} \end{cases}$$

- 当$B_T = o(T)$时， $\mathrm{R}(\mathbf{w}_1^*, \ldots, \mathbf{w}_T^*) = o(T)$

- 局限：算法需要知道先验知识B_T

最差动态遗憾（2）

- 路径长度

$$P_T^* = \sum_{t=2}^{T} \|\mathbf{w}_t^* - \mathbf{w}_{t-1}^*\|$$

$$\mathrm{R}(\mathbf{w}_1^*, \ldots, \mathbf{w}_T^*) = \begin{cases} O(P_T^*) & \text{强凸\&平滑} \quad \text{[Mokhtari et al., 2016]} \\ O(P_T^*) & \text{凸\&平滑\&梯度为0} \quad \text{[Yang et al., 2016]} \\ O(\sqrt{TB_T}) & \text{凸\&} P_T^* \le B_T \end{cases}$$

过拟合静态环境！

- 路径平方长度 [Zhang et al., 2017]
  - 强凸且平滑函数
  - 半强凸且平滑函数
  - 自和谐函数

$$S_T^* = \sum_{t=2}^{T} \|\mathbf{w}_t^* - \mathbf{w}_{t-1}^*\|^2$$

$$\mathrm{R}(\mathbf{w}_1^*, \ldots, \mathbf{w}_T^*) = O(\min(P_T^*, S_T^*))$$

动态遗憾

➢ 动态遗憾（Dynamic Regret） [Zinkevich, 2003]

$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{u}_t)$$

□ $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T$ 为动态变化的模型序列

1. 静态遗憾

$$\text{Regret} = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}^*)$$

2. 最差动态遗憾

$$\mathrm{R}(\mathbf{w}_1^*, \ldots, \mathbf{w}_T^*) = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t^*)$$

动态遗憾

➢ 动态遗憾（Dynamic Regret） [Zinkevich, 2003]

$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{w}_t) - \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{u}_t)$$

- $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T$为动态变化的模型序列
- 在线梯度下降

$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = O\left(\sqrt{T}(1 + P_T)\right)$$

✓其中

$$P_T = \sum_{t=2}^{T} \|\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-1}\|$$

- 优势：当比较序列变化缓慢，动态遗憾自动变小

我们的贡献

- 动态遗憾（Dynamic Regret） [Zinkevich, 2003]
  - 在线梯度下降

$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = O\left(\sqrt{T}(1 + P_T)\right)$$

其中$P_T = \sum_{t=2}^{T} \|\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-1}\|$为路径长度

- 我们的贡献 [Zhang et al, 2018]
  - 首次揭示了动态遗憾的下界

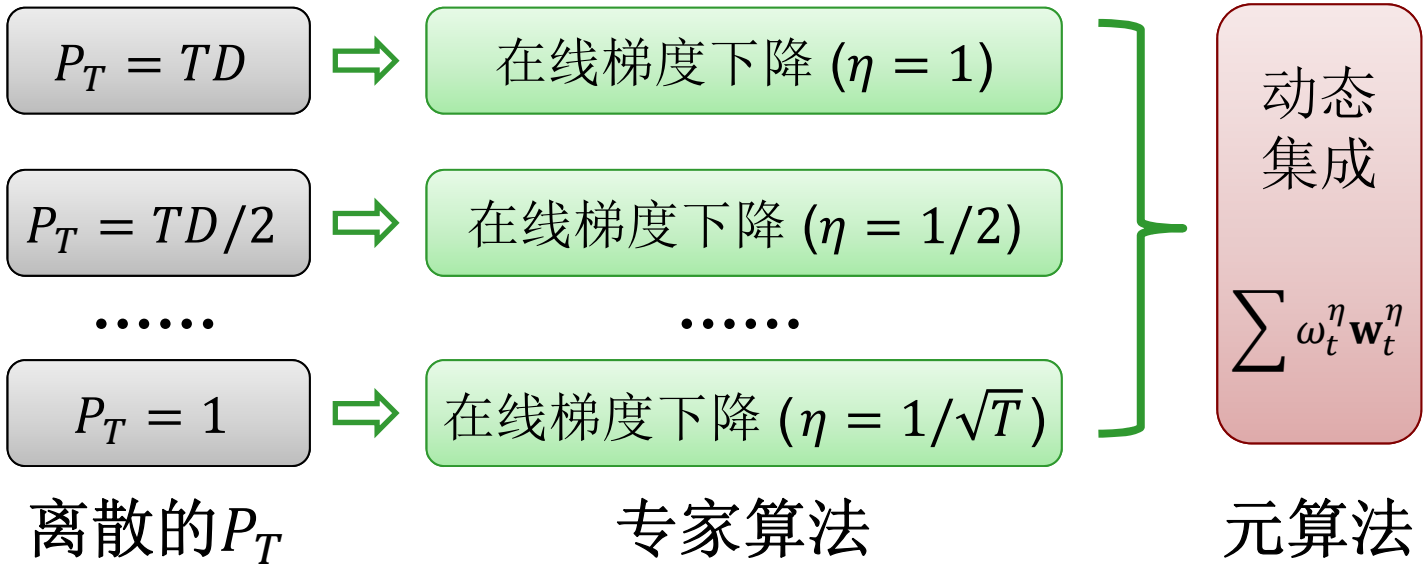
$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = \Omega\left(\sqrt{T(1 + P_T)}\right)$$

  - 设计了最优的在线学习算法——Ader

$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = O\left(\sqrt{T(1 + P_T)}\right)$$

Ader [Zhang et al, 2018]

- 核心思想
  1. 离散化路径长度$P_T = \sum_{t=2}^{T} \|\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-1}\| \in [0, TD]$
  2. 为P_T的每一个离散值设计最优的子算法，即专家
  3. 通过元算法动态集成所有专家算法的输出
- 算法流程



问题相关的理论

- Ader [Zhang et al, 2018]

$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = O\left(\sqrt{T(1+P_T)}\right)$$

  - T为迭代次数、 $P_T = \sum_{t=2}^{T} \|\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-1}\|$ 为路径长度
  - 局限：没有反映问题本身的特点

- $\text{Sword}_{\text{best}}$ [Zhao et al, 2020]
  - 利用平滑性质

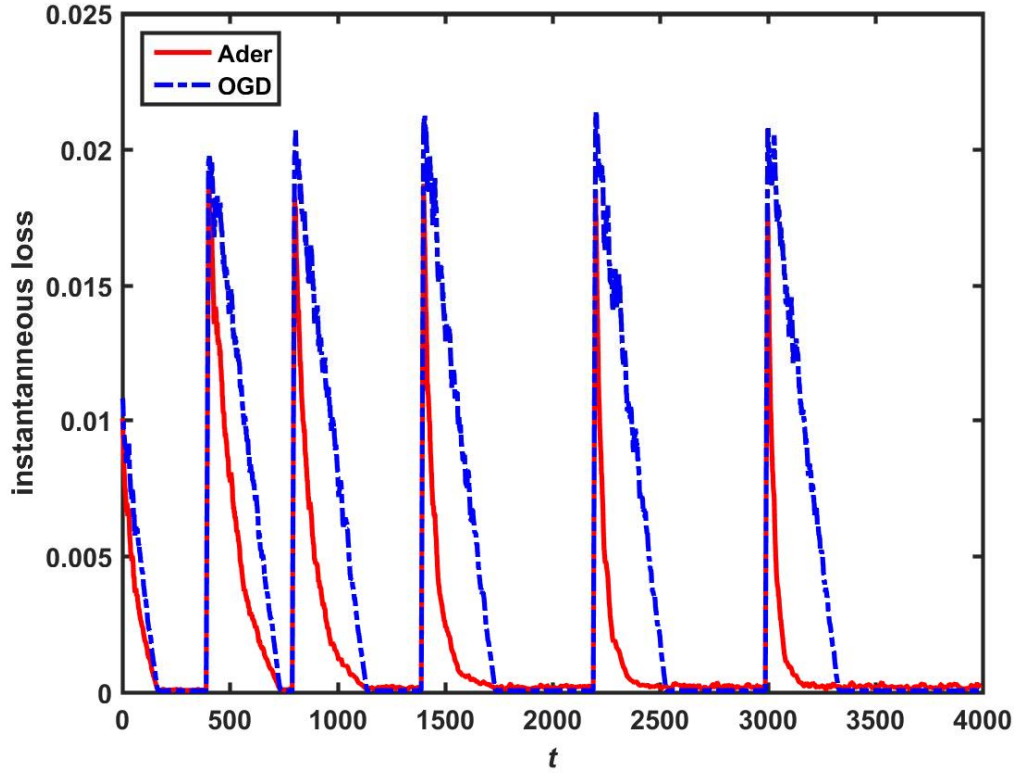
1. 问题容易： F_T小
2. 函数变化慢： G_T小

$$\mathrm{R}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_T) = O\left(\sqrt{(1+P_T+\min(F_T, G_T))(1+P_T)}\right)$$

$$F_T = \sum_{t=1}^{T} f_t(\mathbf{u}_t), \qquad G_T = \sum_{t=2}^{T} \sup_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}} \|\nabla f_t(\mathbf{w}) - \nabla f_{t-1}(\mathbf{w})\|_2^2$$

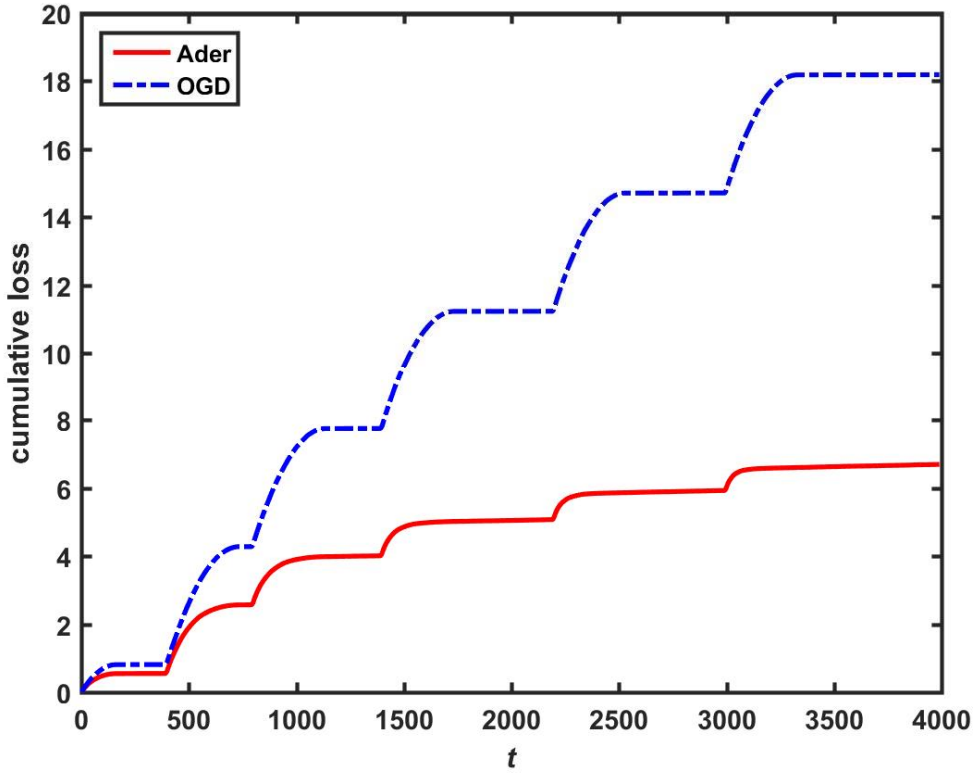
实验（1）

- 凸损失函数$f_t(\mathbf{w}) = \left|\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_t - y_t\right|$
  - 瞬时损失



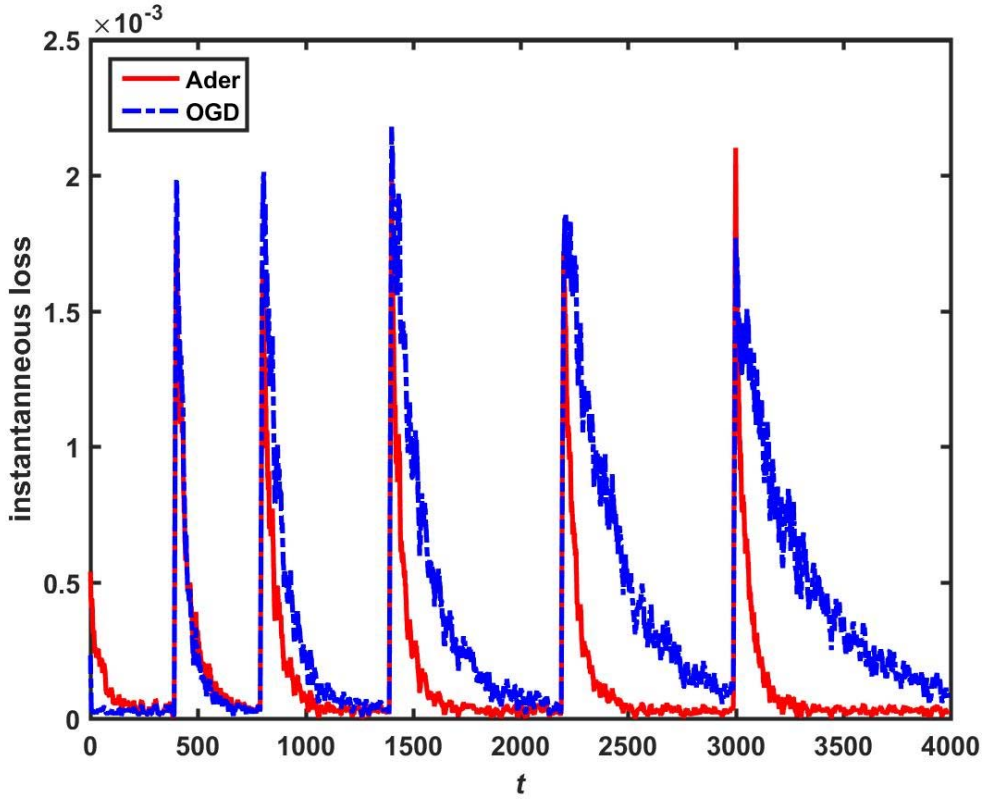
实验（2）

- 凸损失函数$f_t(\mathbf{w}) = \left|\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_t - y_t\right|$
  - 累计损失



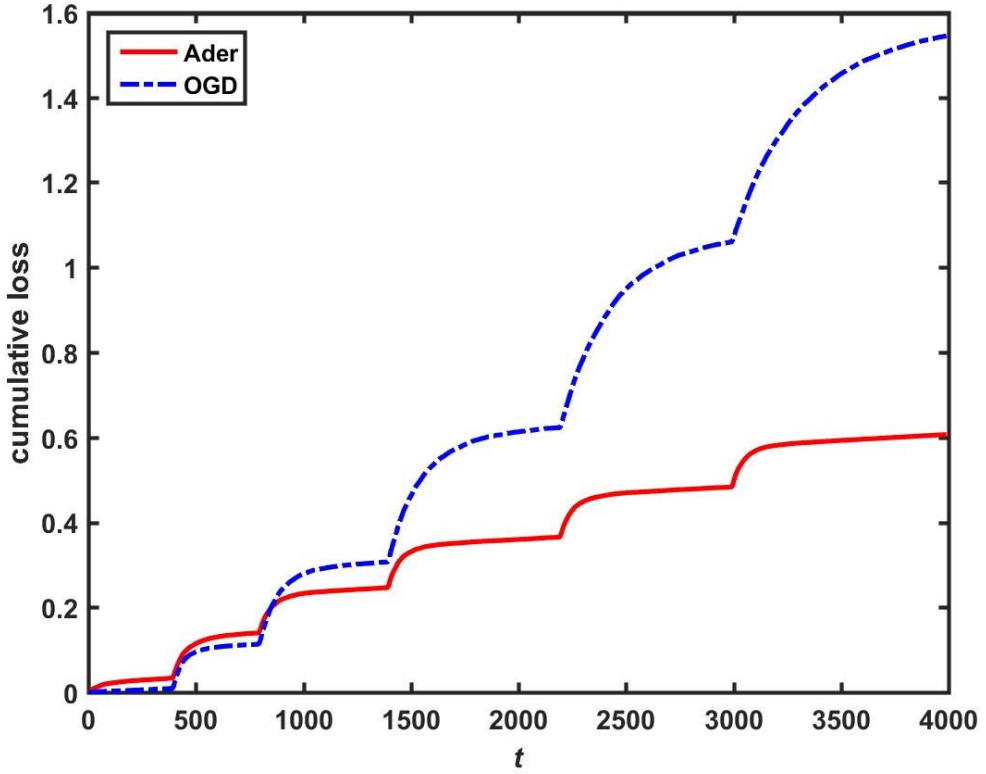
实验（3）

- 强凸损失函数 $f_t(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_t - y_t)^2 + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{w}\|^2$
  - 瞬时损失



实验（4）

- 强凸损失函数 $f_t(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_t - y_t)^2 + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{w}\|^2$
  - 累计损失



目录

- 研究背景
  - 机器学习
  - 大数据
- 在线学习
  - 遗憾
  - 在线凸优化
- 动态环境
  - 动态遗憾
  - 自适应算法
- 总结

总结与展望

- 动态环境下的在线学习
  - 新的度量准则：动态遗憾
  - 首个下界$\Omega\left(\sqrt{T(1+P_T)}\right)$、最优算法Ader [Zhang et al, 2018]
  - 问题相关的算法$\text{Sword}_{\text{best}}$ [Zhao et al, 2020]
- 未来工作
  - 利用函数额外的性质提升动态遗憾
    - ✓强凸、指数凹等
  - Dynamic Regret with Switching Cost [Chen et al., 2018]

$$\sum_{t=1}^{T}\left(f_t(\mathbf{w}_t)+\|\mathbf{w}_t-\mathbf{w}_{t-1}\|\right)-\sum_{t=1}^{T}\left(f_t(\mathbf{u}_t)+\|\mathbf{u}_t-\mathbf{u}_{t-1}\|\right)$$

参考文献（1）

谢谢大家！

- Shalev-Shwartz, S. (2011)

  Online learning and online convex optimization.

  Foundations and Trends in Machine Learning, 4(2):107–194.

- Cesa-Bianchi, N. and Lugosi, G. (2006)

  Prediction, Learning, and Games.

  Cambridge University Press.

- Rosenblatt, F. (1958)

  The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain.

  Psychological Review, 65:386–407.

- Littlestone, N. and Warmuth, M. K. (1989)

  The weighted majority algorithm.

  In Proceedings of the 30th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pages 256–261.

参考文献（2）

- Zinkevich, M. (2003)

  Online convex programming and generalized infinitesimal gradient ascent.

  *In Proceedings of the 20th International Conference on Machine Learning (**ICML**).*

- Hazan, E., Agarwal, A., and Kale, S. (2007)

  Logarithmic regret algorithms for online convex optimization.

  Machine Learning, 69:169–192.

- Besbes, O., Gur, Y., and Zeevi, A. (2015)

  Non-stationary stochastic optimization.

  Operations Research, 63(5):1227–1244.

- Mokhtari, A., Shahrampour, S., Jadbabaie, A., and Ribeiro, A. (2016)

  Online optimization in dynamic environments: Improved regret rates for strongly convex problems.

  In Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control, pages 7195–7201.

- Chen, N., Goel, G., and Wierman, A. (2018)

  Smoothed online convex optimization in high dimensions via online balanced descent.

  In Proceedings of the 31st Conference on Learning Theory, pages 1574–1594.

参考文献（3）

- Yang, T., Zhang, L., Jin, R., and Yi, J. (2016)

  Tracking slowly moving clairvoyant: Optimal dynamic regret of online learning with true and noisy gradient.

  In Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning, pages 449–457.

- Zhang, L., Yang, T., Yi, J., Jin, R., and Zhou, Z.-H. (2017)

  Improved dynamic regret for non-degenerate functions.

  In Advances in Neural Information Processing Systems 30, pages 732–741.

- Zhang, L., Yang, T., Jin, R., and Zhou, Z.-H. (2018)

  Dynamic regret of strongly adaptive methods.

  In Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning.

- Zhao, P., Zhang, Y.-J., Zhang, L., and Zhou, Z.-H. (2020).

  Dynamic regret of convex and smooth functions.

  In In Advances in Neural Information Processing Systems 33.